Université Frères Mentouri Constantine 1
Faculté de Sciences de la Terre, de Géographie et d'Aménagement du Territoire
Département des Sciences Géologique

Cours Maths 02
2ème Partie : Calcul de Probabilité
Chapitre 03: Rappels de Probabilité

Enseignant: Bouedja F

Notes de cours pour les étudiants de L1-S2 Socle Commun Géologie

Vocabulaire

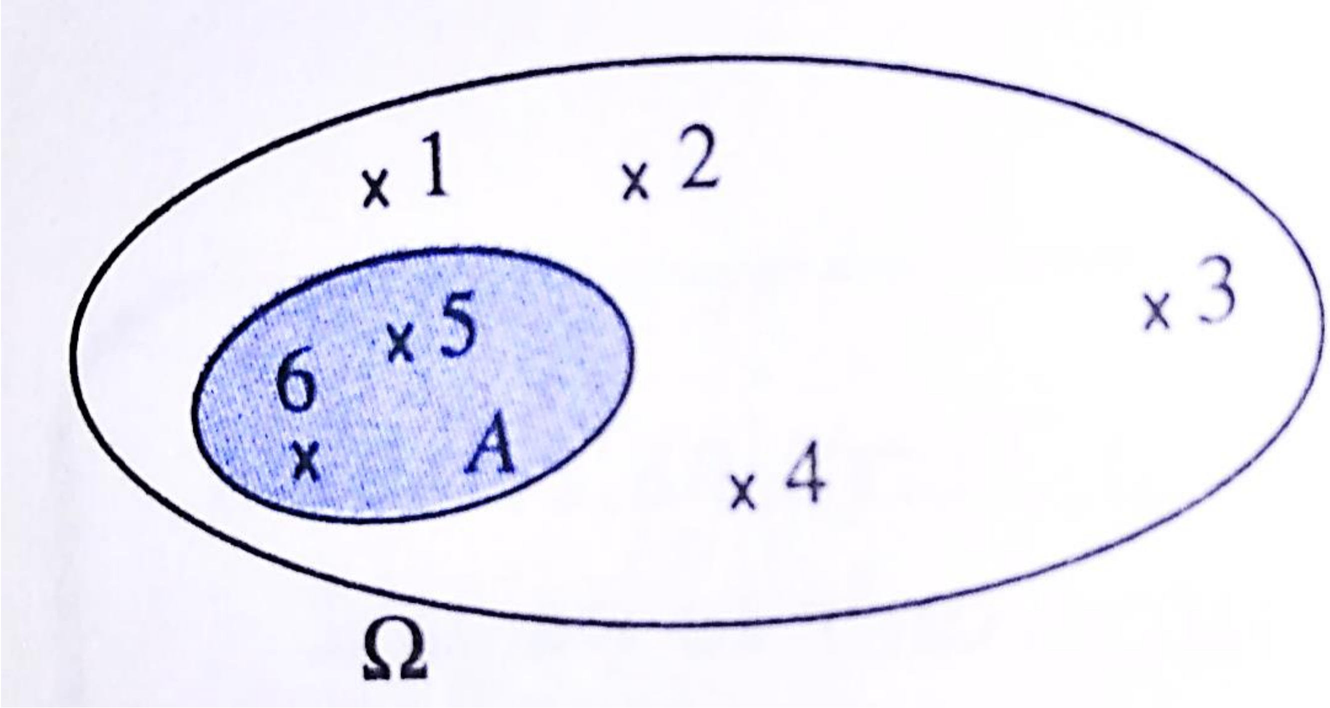
1. Dans une expérience aléatoire, ***l'Univers*** $\boldsymbol{\Omega}$ est l'ensemble des résultats possibles.
2. Un ***évènement*** est une partie de l'Univers $\boldsymbol{\Omega}$
3. ***Un évènement élémentaire*** est un évènement possédant un seul élément.
4. Deux évènements $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont ***disjoints (incompatibles)*** si et seulement si, $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$.
5. ***L'événement contraire*** d'un événement $\boldsymbol{A}$ est l'ensemble $\overline{\boldsymbol{A}}$ des éléments de Ω n'appartenant pas à $\boldsymbol{A}$.
6. On note $P(\Omega)$ l'ensemble des événements de l'Univers Ω.

Exemple

Dans le cas d'un lancer de Dé, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

On note $\{5\}$ l'évènement élémentaire

A=$\{5, 6\}$ est un évènement de Ω puisque $A \subset \Omega$



Calculs des probabilités

a. Définition

Soit un univers fini.

Une probabilité sur est une application P de l’ensemble des événements de Ω dans l’intervalle [0, 1] telle que :

- P(Ω) = 1
- Pour tous événements A et B, si $\boldsymbol{A \cap B \neq 0}$ alors:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

b. Propriétés

- P($\overline{\boldsymbol{A}}$) =1-$P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$-$P(A \cap B)$
- La probabilité d’un évènement $\boldsymbol{A}$ est égale à la somme des probabilités des évènements élémentaires inclus dans $\boldsymbol{A}$.

Equiprobabilité

L'équiprobabilité correspond au cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Dans ce cas:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{Nombre\ d'\text{él}é ments\ de\ A}{Nombre\ d'\text{él}é ments\ de\ \Omega} = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ Cas\ Possible}}$$

Si les n événements élémentaires de l'univers $\boldsymbol{\Omega}$ sont équiprobables chacun a la probabilité $\frac{1}{n}$.

Probabilité conditionnelle

Soit P une probabilité sur $\boldsymbol{\Omega}$ et A un événement de probabilité non nulle.

La probabilité sachant que A (est réalisé) est l'application P_A qui à tout événement B associe le nombre:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$P_A(B) = \mathrm{P}(\mathrm{B}|A)$: probabilité de **B** sachant que **A** est réalisé.

Propriétés:

- $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$
- $P(A \cap B) = P_B(A)P(B) = P_A(B)P(A)$

Événements Indépendants

Les événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

<u>Remarques:</u>

- Si $\boldsymbol{P(A) \neq 0}$ et $\boldsymbol{P(B) \neq 0}$, **A** et **B** sont indépendants si et seulement si: $\boldsymbol{P_A(B) = P(B)}$ ou $\boldsymbol{P_B(A) = P(A)}$
- **Ne pas confondre**

A et **B** sont incompatibles : $\boldsymbol{A \cap B = \Phi}$

A et **B** sont indépendants : $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$

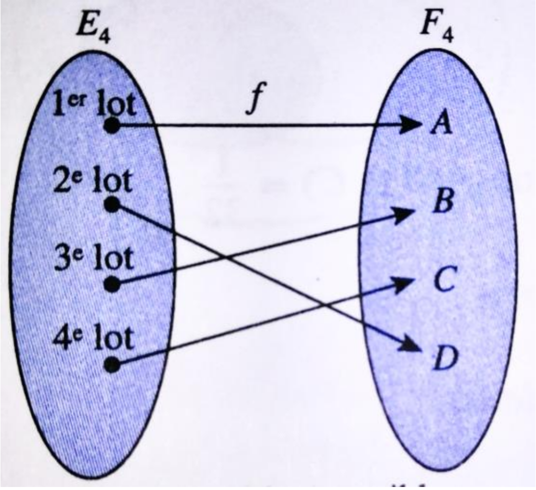
Exemple à faire par les étudiants

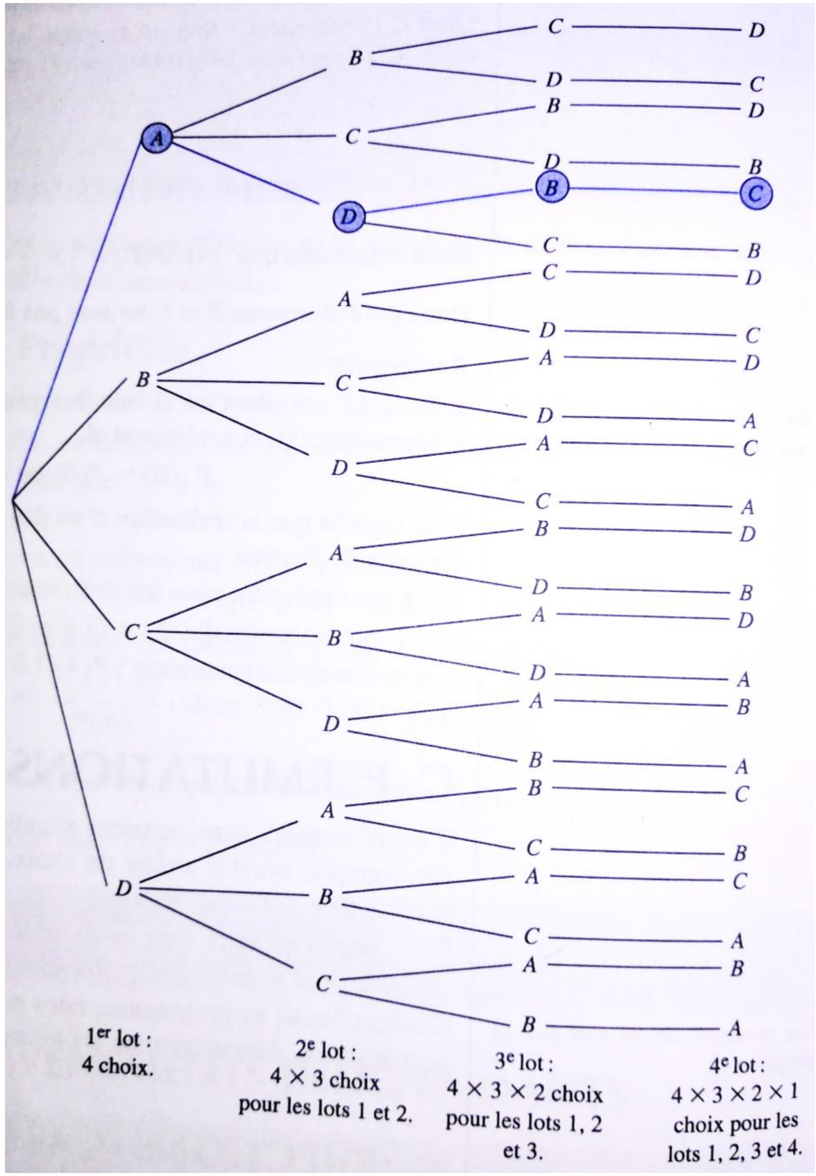
La probabilité d'atteindre un objectif est $\frac{8}{10}$ quand le tir est exécuté avec une première arme, et $\frac{7}{10}$ quand il est exécuté avec une seconde arme.

Trouver la probabilité de toucher la cible, si le tir est effectuer simultanément avec les deux armes.

On estime que la cible est atteinte, s'elle est touché par l'une au moins des armes.

Bijection: est une application telle que tout élément de l’ensemble d'arrivée F_n est l’image d’un élément et d’un seul de l’ensemble de départ E_n.





Permutations-Combinaisons

a. Permutation

Soit E_n et F_n des ensembles à n éléments. Le nombre de bijections de E_n sur F_n est:

$$\boldsymbol{n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 3*2*1}$$

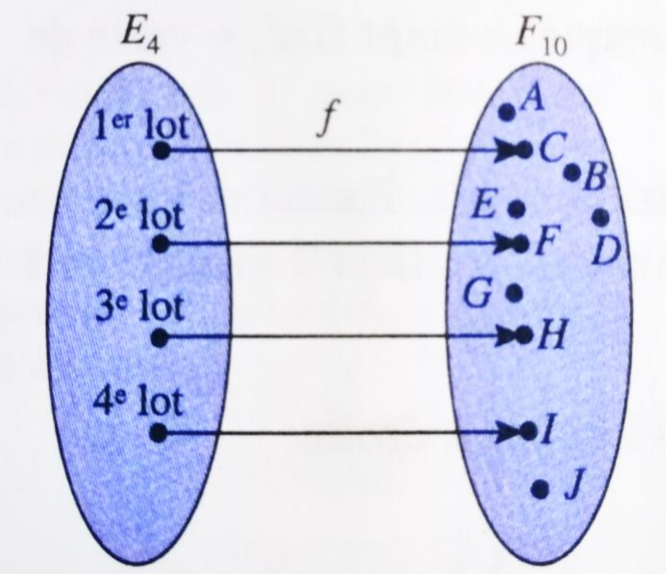
On appelle ***permutation*** de E_n une bijection de E_n sur E_n (c'est-à-dire E_n=E_n).

Le nombre de permutation de n éléments est $n!$.

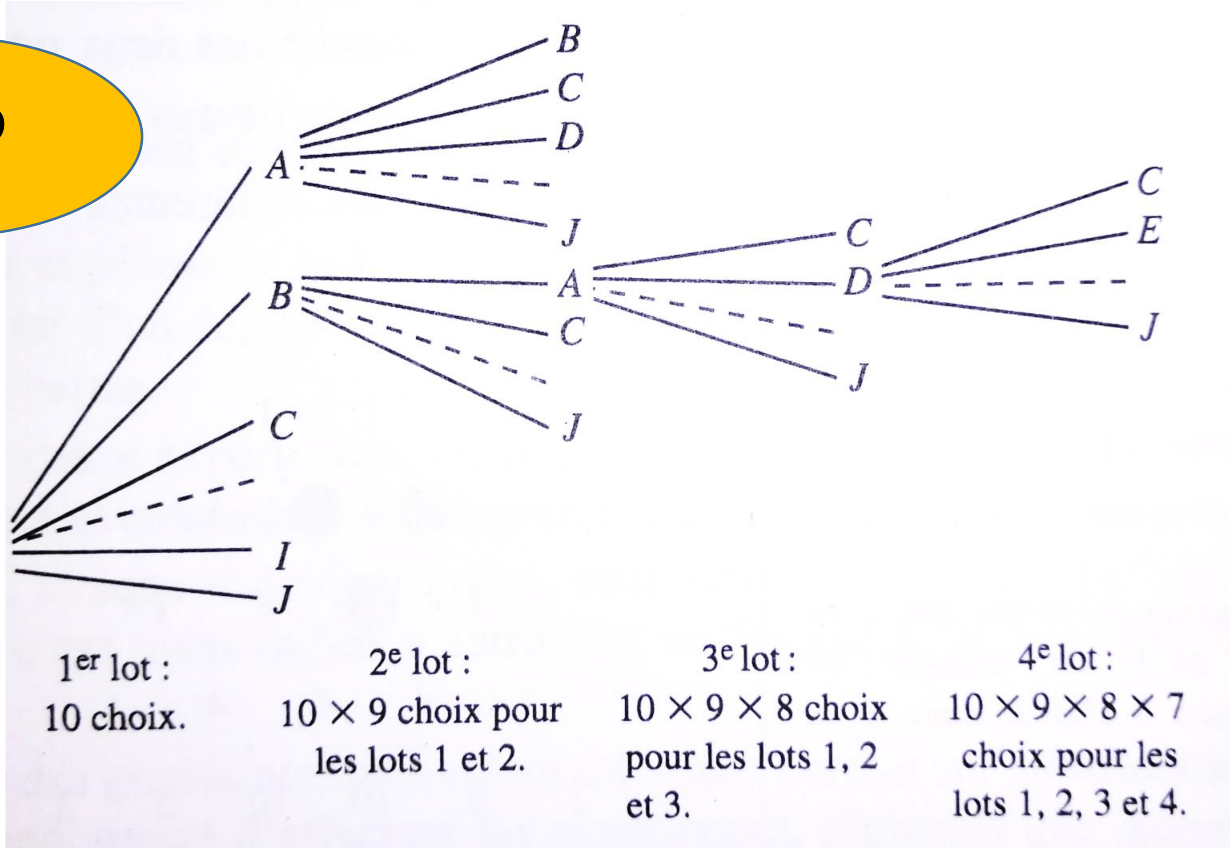
Remarque: **0!=1**

!: se lit factoriel

b. Combinaisons



N?



Le nombre de listes ordonnées de quatre clients pris parmi dix clients est : $\mathbf{4!\,N = \frac{10!}{6!} \Rightarrow N = \frac{10!}{6!}}$

Ce nombre est noté C_{10}^{4} (C dix quatre)

Soit F_n un ensemble à ***n*** éléments. Une ***combinaison*** (sans répétition) d'ordre p où, $p \leq \; n$, est une partie de F_n à ***p*** éléments.

Le ***nombre de combinaisons*** d'ordre ***p*** de F_n est:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)} \quad noté\ aussi \binom{p}{n}$$

Propriétés:

$$\boldsymbol{C_n^0 = 1}$$

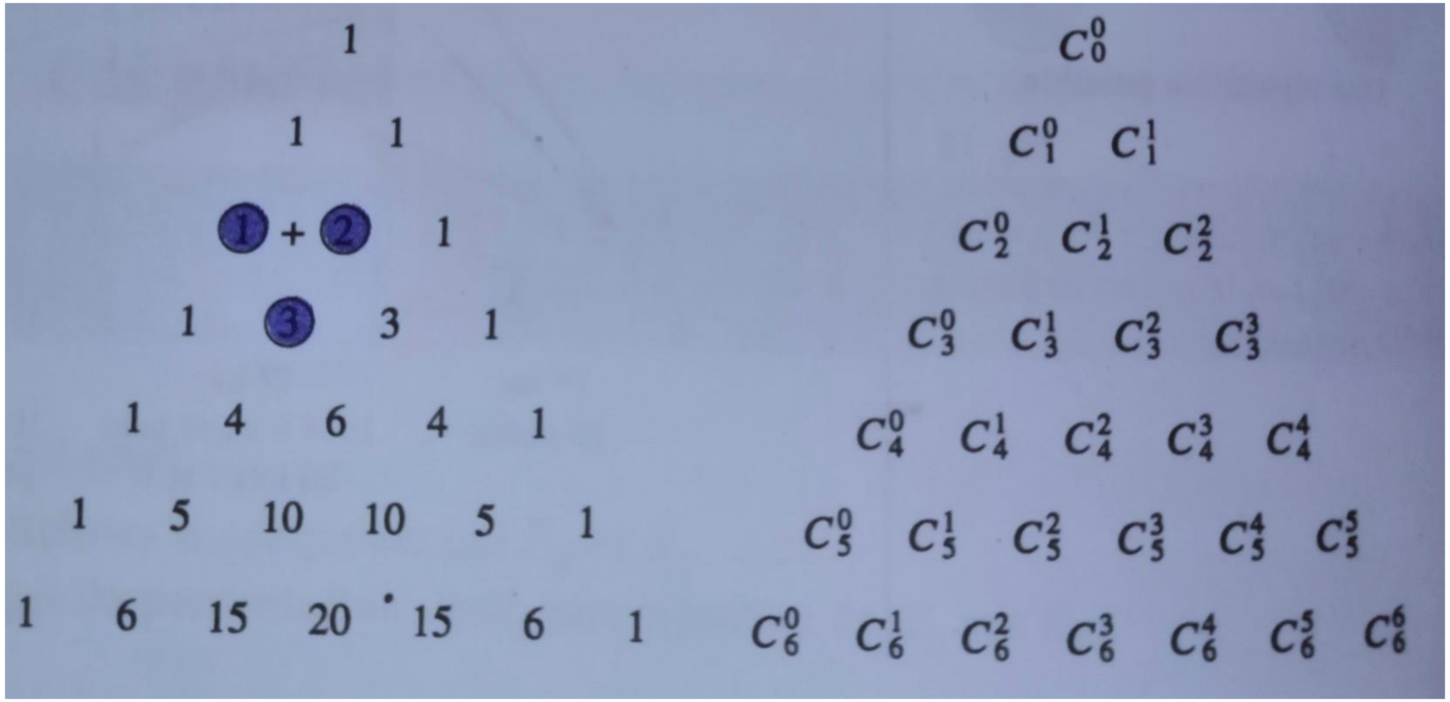
$$\boldsymbol{C_n^n = 1}$$

$$\boldsymbol{C_n^{n-p} = C_n^p}$$

$$\boldsymbol{C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p}$$

Triangle de Pascal

il s’agit d’un tableau donnant le nombre $\boldsymbol{C_n^p}$ lorsque, $\boldsymbol{n}$ étant fixé, $\boldsymbol{p}$ varie de $\boldsymbol{0}$ à $\boldsymbol{n}$.



Formule du binôme de Newton

$$\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R};\ \forall\, \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0} \in \mathbb{N}:$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}} \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{p}}$$

A.N:

Développer : $(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{8}}$

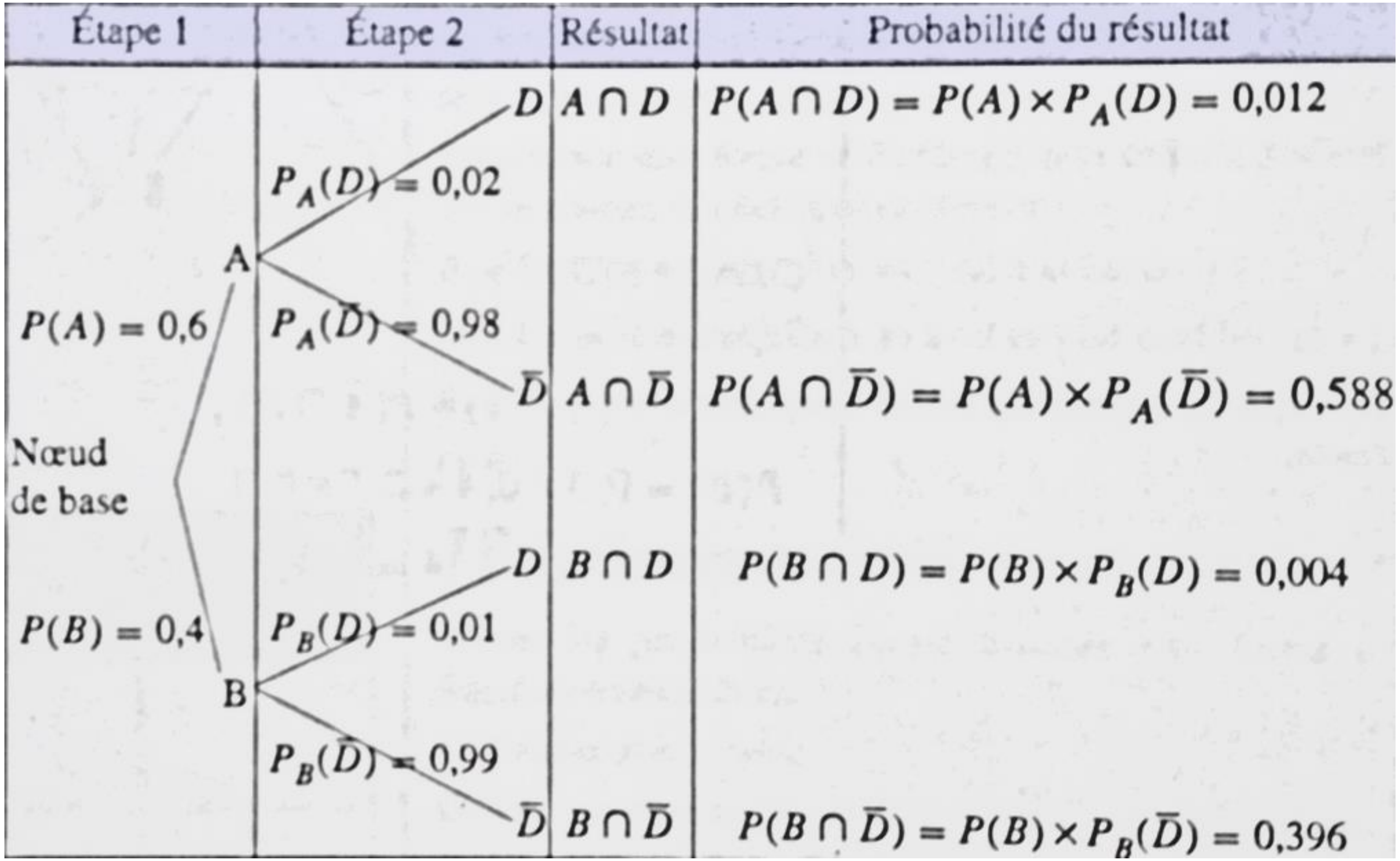
Approche de la loi faible des grands nombres

La loi faible des grands nombre est un théorème portant sur des probabilité: il permet, avant d’effectuer les expériences, d’obtenir une information sur leurs résultats.

« On obtient, avec une probabilité aussi grande que l’on peut, une fréquence d’apparition de l’événement A, au cours des n expériences indépendantes, aussi proche que l’on veut de p, lorsque n est suffisamment grand. »

Arbre Pondéré

On appelle ***arbre pondéré*** un arbre pour lequel chaque branche est associée à une probabilité.



Travaux Pratiques

Exemple 01

On donne deux événements A et B tels que $P(A)$=0,81; $P(B) = 0{,}16$

Calculer $P(A \cup B)$ dans chacun des cas suivants:

1. A et B sont incompatible
2. $P(A \cap B)$=0,11

Exemple 02

On considère deux événements A et B tels que $P(A)$=0,4; $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cup$

Exemple 03

On lance n fois une pièce de monnaie, on suppose que la probabilité d'obtenir pile est égale à la probabilité d'obtenir face. Soient A et B les événements suivants :

A = « *obtenir au plus une fois pile* »

B = « *obtenir au moins une fois pile et au moins une fois face* »

1. Calculez $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$ pour $n = 2$; A et B sont-ils indépendants pour $n = 2$?

2. Même question pour $n = 3$.

Exemple 04

- ✓Combien peut-on former de nombre de trois chiffres avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 ; le même chiffre pouvant être utilisé deux ou trois fois ?

- ✓Combien de nombres distincts de trois chiffres peut-on former avec les chiffres 3, 4, 5, 6, chacun utilisé au plus une fois ?

Références:

Bernard Verlant; Geneviève Saint-Pierre: Statistiques et probabilités